5-8 класс

Каждое задание оценивается максимум в 10 баллов. Время выполнения – 60 минут.

1. Учитель смастерил несколько шкатулок для телефонов своих учеников. Если в каждую шкатулку убрать по 5 телефонов, то один телефон не влезет, а если в каждую шкатулку убрать по 6 телефонов, то одна шкатулка полностью будет пустой. Сколько шкатулок смастерил учитель, и сколько телефонов было у всех учеников? *Приведите полное обоснованное решение.*

Решение. Пусть x – количество шкатулок, а y – количество телефонов. Тогда, исходя из условия задачи, имеем систему:

$$\begin{cases} 5x+1=y, \\ 6(x-1)=y. \end{cases}$$

Решая систему, получаем: 7 шкатулок и 36 телефонов.

Ответ. 7 шкатулок и 36 телефонов.

<u>Критерии оценивания</u>. Верный ответ без пояснений оценивается в 2 балла; обоснованное корректное решение – в 10 баллов. В случае, если система составлена верно, но ответ неправильный – 5 баллов.

2. В стране Оз живут четыре волшебницы, две из них добрые и всегда говорят правду, а две другие злые и всегда лгут. Известно, что всего у волшебниц вместе 100 чародейских бобов. Первая волшебница сказала: «Мы разделили чародейские бобы поровну». Вторая волшебница: «У всех разное количество чародейских бобов, но каждой досталось хотя бы 20 бобов». Третья волшебница: «У каждой количество чародейские бобов делится на 5». Четвертая волшебница: «У всех разное количество бобов, но каждой досталось не более 35 бобов». Какое максимальное количество бобов могло достаться одной волшебнице? *Приведите подробное обоснованное решение, а также пример, подтверждающий возможное распределение бобов.*

Решение. Так как первая говорит о равном количестве бобов, а четвертая – о различном, то одновременно и первая, и четвертая волшебницы не могут говорить правду. Также не могли одновременно сказать правду вторая и третья волшебницы. Действительно, если они обе сказали правду, то у каждой количество бобов делится на 5, при этом у всех разное количество, не меньшее 20. Тогда у них вместе не меньше 20+25+30+35=110 бобов, а всего бобов 100, откуда возникает противоречие. Поэтому среди первой и четвертой волшебниц ровно одна говорит правду и ровно одна лжёт. Аналогично, среди второй и третьей волшебниц ровно одна говорит правду и ровно одна врёт. Если первая говорит правду, то всем досталось по 25 бобов (такая ситуация возможна). И в этом случае максимальное количество равно 25. Если же четвертая говорит правду, то каждому досталось не больше 35 бобов. Покажем, что в этом случае одной из волшебниц могло достаться ровно 35 бобов (и тогда ответ в задаче будет 35). Такая ситуация также возможна, если, например, волшебницам досталось 35, 30, 20 и 15 бобов (вторая волшебница солгала, а третья сказала правду). Замечание. Есть и другие способы распределить бобы так, чтобы одной из волшебниц досталось 35 бобов. Например, если досталось 35, 24, 21 и 20 бобов (третья солгала, а вторая сказал правду). В любом случае, максимальное количество бобов, которое могло достаться одной волшебнице, равно 35.

Ответ. 35 бобов.

<u>Критерии оценивания</u>. Верный ответ без пояснений оценивается в 2 балла; если дан ответ и приведен пример – 4 балла; если дан ответ, приведено доказательство, но не приведён пример – 8 баллов; обоснованное корректное решение с примером и доказательством – 10 баллов.

3. Незнайка, когда прилетел на Луну, то узнал, что там нет соли. У него созрел хитрый план по её продаже. В определенный момент у Незнайки было три солонки вместимостью 6, 3 и 7 ложек соответственно. Также известно, что в первой и третьей солонках содержится соответственно 4 и 6 ложек соли. Требуется, пользуясь только этими тремя солонками, разделить соль поровну, то есть на две равные части.

Решение.

Солонки	Вместимость		
	6 ложек	3 ложки	7 ложек
До пересыпания	4	0	6
После 1-го пересыпания	1	3	6
После 2-го пересыпания	1	2	7
После 3-го пересыпания	6	2	2
После 4-го пересыпания	5	3	2
После 5-го пересыпания	5	0	5

Замечание. Возможны и другие способы.

<u>Критерии оценивания</u>. Принимается только обоснованное корректное решение, оценивается в 10 баллов. Ответ без пояснений оценивается в 0 баллов.

4. Магическим называется квадрат, в котором сумма чисел, стоящих в каждой строке, в каждом столбце и на диагоналях, равны. Восстановите ниже приведенный магический квадрат.

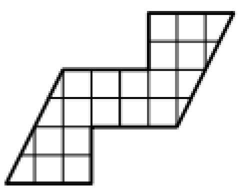
20		
	17	
16		

Ответ.

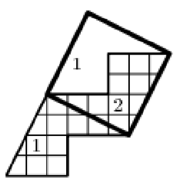
20	13	18
15	17	19
16	21	14

<u>Критерии оценивания</u>. Пояснений не требуется, принимается лишь верный ответ, оценивается в 10 баллов.

5. Одним разрезом поделите фигуру на две части, так чтобы из этих частей можно было составить квадрат.



Ответ.



<u>Критерии оценивания</u>. Пояснений не требуется, принимается лишь верный ответ, оценивается в 10 баллов.

9-11 класс

Каждое задание оценивается в 10 баллов. Время выполнения – 60 минут.

1. Два друга, Максим и Олег, в течение двух месяцев решали задачи для подготовки к олимпиаде. В первый месяц Максим решил на 25% задач меньше, чем Олег, а во второй – на 20% больше, чем Олег. За все два месяца Максим решил задач на 10% больше, чем Олег. Какое *наименьшее* количество задач они могли *решить вместе* за два месяца?

Решение. Максим в первый месяц решил ¾, а во второй – $^6/_5$ от числа задач, решенных в эти месяцы Олегом. Пусть Олег решил в первый месяц $4x$ задач, а во второй – $5y$, тогда Максим решил $3x$ и $6y$ задач соответственно. По условию, $3x + 6y = {}^{11}/_{10}\,(4x + 5y)$. Это равенство преобразуется к виду $14x = 5y$. Откуда следует, что x кратно 5, а y кратно 14, значит, наименьшие натуральные числа, удовлетворяющие этому равенству: $x = 5$, $y = 14$, а общее количество задач $^{21}/_{10}\,(4x + 5y) = 189$.

Ответ. 189.

<u>Критерии оценивания</u>. Пояснений не требуется, принимается лишь верный ответ, оценивается в 10 баллов.

2. В некогда популярной компьютерной игре «Need For Speed» в 1-м туре необходимо было выбрать себе четыре машины для участия в турнире. На выбор предлагается 9 автомобилей, из которых 2 авто марки «Ford» и 7 авто марки «Mazda». Сколькими способами участник может выбрать себе 4 автомобиля из имеющихся, если хотя бы один из автомобилей должен быть марки «Ford», так как это требует спонсор? Считайте, что все автомобили одинаковы по техническим характеристикам. Приведите подобное обоснованное решение.

Решение. Среди выбранных автомобилей по условию обязательно входит либо один «Ford», либо два. Рассмотрим оба случая. Если входит два авто «Ford», то два авто марки «Mazda» к ним можно добавить C_7^2 способами. Если же входит только один авто «Ford», (его можно выбрать двумя способами), то необходимо выбрать ещё три авто «Mazda», что можно сделать C_7^3 различными способами. Таким образом, общее число возможных способов выбора четырёх автомобилей равно $C_7^2 + C_7^3 = 91$.

Ответ. 91.

<u>Критерии оценивания</u>. Принимается только обоснованное корректное решение, оценивается в 10 баллов. Ответ без пояснений оценивается в 0 баллов.

3. Докажите тождество для всех натуральных n:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Решение. Проведём доказательство методом математической индукции.

База индукции. При n=1 имеем: $1 \cdot 1 = (1+1)! - 1$, что, очевидно, является верным.

Предположение индукции. Считаем верным следующее:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + (n-1) \cdot (n-1)! = n! - 1.$$

Шаг индукции. Рассмотрим левую часть данного тождества:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n! = n! - 1 + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Первое равенство верно по предположению индукции, выражение после второго знака «равно» получилось путём вынесения общего множителя за скобки. Тождество доказано.

<u>Критерии оценивания</u>. Доказана база индукции – 1 балл. Записано предположение индукции – 1 балл. Верно проведен шаг индукции – 8 баллов. Итого: 10 баллов за задание.

4. Найдите абсциссы всех точек пересечения графиков функций $y = 2x^4 + x^3$ и $y = 11x^2 - x - 2$. Приведите подробное обоснованное решение.

Решение. Чтобы найти точку пересечения, достаточно приравнять правые части уравнений функций. После переноса слагаемых в левую часть, получим симметрическое уравнение:

$$2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0.$$

Непосредственно подстановкой легко убедиться, что ноль не является решением данного уравнения, а, значит, можно разделить на x^2. Получим:

$$2x^2 + x - 11 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0.$$

Сгруппируем первое и последнее слагаемые, а также второе и предпоследнее, получим:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 11 = 0.$$

Сделаем замену:

$$t = x + \frac{1}{x}$$

Возведём полученное равенство в квадрат:

$$t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

Откуда имеем:

$$t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Тогда уравнение примет вид:

$$2t^2 - 4 + t - 11 = 0$$

Решая его, получим корни: $t = -3; t = 2{,}5$.

Сделав обратную замену, найдём решение:

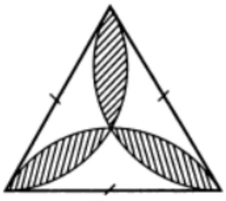
$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2};\ x_3 = 0{,}5;\ x_4 = 2.$$

Ответ.

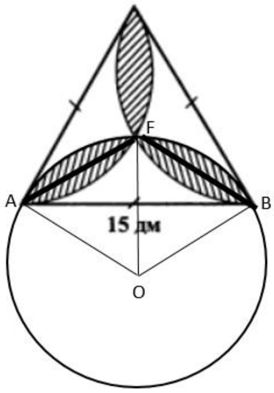
$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2};\ x_3 = 0{,}5;\ x_4 = 2.$$

Критерии оценивания. Задача сведена к верному уравнению – 1 балл; проведена верная замена – 3 балла; верно найдены значения t – по 1 баллу за каждое (т.е. 2 балла). Верно найдены итоговые значения x – по 1 баллу за каждое (т.е. 4 балла). Итого за задание – 10 баллов.

5. Найти площадь заштрихованной фигуры. Приведите обоснованное подробное решение.



Решение. Обозначим сторону данного треугольника за *a*. По условию *a*=15.



Точка пересечения окружностей располагается в точке пересечения высот, то есть в ортоцентре. Для равностороннего треугольника верны следующие утверждения, известные из школьного курса геометрии:

1) радиус описанной окружности $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

2) Три отрезка прямых, соединяющих ортоцентр с вершинами остроугольного треугольника, разбивают его на три треугольника, имеющих равные радиусы описанных окружностей. При этом одинаковый радиус этих трех окружностей равен радиусу окружности, описанной около исходного остроугольного треугольника.

Используя указанные свойства, можно найти площадь заштрихованной фигуры, вычитая из площади сектора AOB площадь четырехугольника AOBF. Таким образом, получаем:

$$S = \frac{\pi a^2}{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Подставляя *a*=15, получаем:

$$S = \frac{75}{6}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right).$$

Критерии оценивания. Найден радиус описанной окружности – 2 балла; на основании свойств найден радиус окружности с центром в точке O – 3 балла. Задача сведена к верной формуле – 3 балла. Выполнены верные вычисления – 2 балла. Итого: 10 баллов.

Ответ. $S = \frac{75}{6}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$.