5-7 классы

1. Трое внуков: Яшка, Васька, Гришка приехали в гости к бабушке. Один из них – отличник, второй – хорошист, ну а третий – троечник. Говорить, кто из них – кто, они отказываются. Если Гришка — хорошист, то Васька — троечник, если Гришка — троечник, то Васька — отличник. Если Васька — не хорошист, то и Яшка — не хорошист. Помогите бабушке выяснить правду и установить, кто из внуков кем является?

Решение. Васька – отличник, Яшка – хорошист, Гришка – троечник (например).

2. Копатыч раздобыл не менее 10 литров мёда в бочке. Об этом узнала Совунья и попросила у него отлить ей для лечебных целей ровно 6 литров. Как это сделать Копатычу, если из свободной тары у него имеется только девятилитровое ведро и пятилитровый бидон?

Решение.

a>10	a–5	a–5	a–10	a–10	a–1	a–1	a–6	a–6
9	0	5	5	5	9	1	1	6

Решения, которые основывались на том, что в бочке изначально ровно 10 литров оцениваются нулём баллов.

3. Разность между двузначным числом и суммой его цифр есть полный квадрат. Найти все такие числа.

Решение.

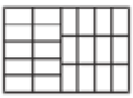
$(10a+b) – (a+b)=x^2$, или $a=(x/3)^2$, где $0<a\leq 9$, a – целое.

Удовлетворяют значения x=3; 6; 9, тогда a=1; 4; 9, откуда каждому значению a соответствует 10 чисел, то есть всего 30 чисел, удовлетворяющих условиям задачи. Перечислим эти числа: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97,98,99.

4. Как разрезать лист бумаги размером 22×15, чтобы получить как можно больше прямоугольников размером 3×5?

Решение.

Отметим, что невозможно получить более 22 прямоугольников. На рисунке показано, что ровно 22 можно



5. Машка-сладкоежка решила приобрести 16 пирожных. В магазине у дома есть пирожные трёх вкусов: апельсиновые, малиновые и клубничные. Сколько существует вариантов различных покупок 16 пирожных, если Машка-сладкоежка желает, чтобы пирожные каждого вкуса составляли не менее четверти от количества всех пирожных?

Решение. Заведомо надо купить по 4 пирожка с каждым вкусом. Остаётся купить ещё 4 пирожка, каждый их которых уже может быть с любым вкусом. Если посчитать количество возможных вариантов, то получится 15.

9-11 класс

1. Решить в натуральных числах уравнение

$$193(x^3y^3+x^2+y^2)=1753(xy^3+1)$$

Решение. Запишем уравнение в виде пропорции

$$\frac{x^3y^3+x^2+y^2}{xy^3+1}=\frac{1753}{193},$$

$$\frac{x^2(xy^3+1)+y^2}{xy^3+1}=\frac{193\cdot 9+16}{193}.$$

В полученном уравнении выделим целую часть

$$x^2+\frac{y^2}{xy^3+1}=9+\frac{16}{193}$$

$$x^2+\frac{1}{xy+\frac{1}{y^2}}=9+\frac{1}{12+\frac{1}{16}}$$

Откуда находим, что x=3, y=4.

2. 25 школьников решили провести турнир по шашкам. Каждый школьник умеет играть в шашки, но все они играют по-разному, и всегда побеждает сильнейший. Какое наименьшее количество игр необходимо провести, чтобы определить двух сильнейших игроков?

Решение. Используем метод «оценка+пример».

Пример. Устроим турнир по олимпийской системе в пять туров: сначала сыграют 12 пар, потом 6, потом 3. Останется четыре человека, сыграют две пары, а потом победители между собой. Тем самым определится сильнейший. Он сыграл не более пяти партий.

Так как выбыло 24 человека, было сыграно ровно 24 партии. Из пяти (или менее) участников, проигравших сильнейшему, снова по олимпийской системе выделим сильнейшего. На это потребуется не более четырёх партий. Итак, 28 партий достаточно.

Оценка. Проведём турнир по какой-то схеме, позволяющей определить двух сильнейших. Ясно, что все участники, кроме самого сильного, проиграли хотя бы по одной партии (иначе сильнейшего определить нельзя).

Можно считать, что все партии играются последовательно. На каждом шаге работы алгоритма будем называть *лидером* участника, который пока никому не проиграл. Пусть выполнены условия:

(1) при игре лидера с не лидером всегда выигрывает лидер;

(2) при сравнении двух лидеров выигрывает тот, у кого было больше выигрышей (если выигрышей было поровну, то результат произвольный.

Такие исходы партий возможны потому, что на лидера нет никаких ограничений сверху: если его силу увеличить, то результаты предыдущих партий не изменятся.

Введём понятие *подчинения* лидеру. Первоначально все участники подчинены только самим себе. После партии типа (2) проигравший и все его подчинённые переподчиняются новому лидеру.

Покажем индукцией по k, что если лидер выиграл k партий, то ему подчинено (вместе с ним самим) не более 2^k участников. При $k = 0$ лидеру подчинён только он сам.

Пусть лидер, выигравший k партий, выигрывает у кого-то в очередной раз. Тот, у кого он выиграл, выиграл не более k партий. Поэтому как выигравшему, так и проигравшему, подчинено не более 2^k участников; при объединении этих двух групп получается не более 2^{k+1} шахматистов.

Итак, при таком течении турнира сильнейший участник выиграл не менее пяти партий, поскольку ему в итоге будут подчинены $2^5 > 24$ участников. Среди пяти шахматистов, проигравших сильнейшему, есть только один, который больше никому не проиграл (иначе мы не будем знать второго по силе участника). Каждый из четырёх остальных проиграл не менее двух партий. Следовательно, всего было не менее $24 + 4 = 28$ проигрышей, а значит, было сыграно не менее 28 партий.

3. Одновременно из деревень А и Б навстречу друг другу вышли Аня и Боря (их скорости постоянны, но не обязательно одинаковы). Если бы Аня вышла на 30 минут раньше, то они встретились бы на 2 км ближе к деревне Б. Если бы Боря вышел на 30 минут раньше, то встреча состоялась бы ближе к деревне А. На сколько?

Решение. Пусть вышли не двое, а четверо: кроме A(Ани) и B(Бори) на полчаса раньше стартовали их двойники a и b. Соответственно, случилось 4 встречи: ab, aB, Ab и AB. Мы знаем, что от места aB до AB 2 км. Ясно, что ab была там же, где AB, но на 30 минут раньше. Поэтому от места aB до ab те же 2 км. Поскольку, однако, b и B идут с одинаковыми постоянными скоростями, то интервал (по времени и расстоянию) между ними одинаковый. Идущие навстречу a и A преодолевают этот интервал за одинаковое время, поскольку их скорости сближения с B одинаковы. А поскольку скорости a и A одинаковы, то и расстояние они при этом проходят одинаковое. Значит, от места Ab до AB тоже 2 км, что и требовалось.

4. Какими должны быть значения a и b, чтобы многочлен $x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$ был полным квадратом?

Приведенный многочлен четвертой степени может быть квадратом лишь приведенного квадратного трехчлена:

$x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b =(x^2+px+q)^2$. Приняв коэффициенты при одинаковых степенях аргумента в обеих частях тождества, получим: $2p=1$; $p^2+2q=2$, $2pq=a$; $q^2=b$. Решив эту систему уравнений, найдем $p=0{,}5$, $q=a=0{,}875$, $b=49/64$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC угол B равен 30°, $AB = BC = 6$. Проведены высота CD треугольника ABC и высота DE треугольника BDC. Найдите BE.

Решение. $DC=0{,}5BC=3$. $\angle DCB=90°-\angle DBC=60°$.

Следовательно, $CE=0{,}5DC=1{,}5$. Таким образом, $BE=BC-CE=4{,}5$.